TD : LIMITES ET CONTINUITE

∗ **1** Étudier la parité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

∗ **2** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone et périodique. Montrer que f est constante.

---

3 Montrer que les fonctions sin et cos sont 1-lipschitziennes.

---

4 Soit $X \subset \mathbb{R}$ et $f : X \to X$ strictement croissante.
Montrer que $\quad \forall x \in E, \quad (f \circ f)(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x.$

---

5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.
On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\ \forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = ax$.
① On suppose $a = 0$. Montrer que $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$
② On suppose $a \neq 0$. [a] Justifier que $a > 0$. [b] Montrer que $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax.$

---

6 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+a)f(x-a)$.
Montrer que f est périodique.

∗ **7** Soit f une fonction croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer que f admet un point fixe.

∗ **8** Soient f et g deux fonctions bornées de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\ \varphi(t) = \sup_{[0,1]}(f+tg)$. On note $M = \sup_{[0,1]}|g|$.
① Montrer que : $\quad \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in [0,1], \quad f(x) + sg(x) \leqslant \varphi(t) + M|s-t|.$
② En déduire que φ est lipschitzienne.

∗ **9** Calculer, si elles existent, les limites suivantes :
① $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x}$. ② $\lim\limits_{x\to 0}\left(2\cos^2\dfrac{1}{x} - \sin\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.
③ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{1-\cos x}\right)$. ④ $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
⑤ $\lim\limits_{x\to +\infty} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$. ⑥ $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x-1}\right)$.

---

10 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin\dfrac{1}{x}$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, n'a pas de limite en 0.

∗ **11** Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
① $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$. ② $f(x) = x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$. ③ $f(x) = 1_{\mathbb{Q}}(x)$.
④ $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1-x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ ⑤ $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ ⑥ $f(x) = x^2 E\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

---

12 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
∗ ① On suppose f continue en 0 et $\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.
② On suppose f continue en 0 et 1 et $\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante.

∗ **13** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ et telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

① Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad f(nx) = nf(x)$.

② On pose $a = f(1)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z},\quad f(n) = an$.

③ Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q},\quad f(r) = ar$. ④ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = ax$.

∗ **14** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f(x+y) = f(x)f(y)$.

① Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) \geqslant 0$.

② Montrer que si f s'annule en un point a de $\mathbb{R}$ alors f s'annule partout.

③ On suppose que $f \neq 0$. Déterminer f.

---

15 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

① Montrer que si $f(0) = f(1) = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2f(x)$ et que f est périodique, et en déduire que f est nulle.

② Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) - ax - b$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Vérifier que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad g\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{g(x)+g(y)}{2}$.

③ Si $a = f(1) - f(0)$ et $b = f(0)$, montrer que $g = 0$.

④ En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

∗ **16** Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit croissante. Montrer que f est continue.

---

17 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ est nulle sur une patrie D dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

∗ **18** Soit D une partie dense dans $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f|_D$ soit croissante. Montrer que f est croissante.

---

19 Soient f et g deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Si $\big(f(0) - g(0)\big)\big(f(1) - g(1)\big)$ est négatif. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

---

20 Montrer que l'équation $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ admet au moins une solution $x \in \mathbb{R}$.

---

21 Soit P une fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré impair.
Montrer que P s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

∗ **22** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f\big([0,1]\big) \subset [0,1]$ ou $[0,1] \subset f\big([0,1]\big)$.
Montrer que f admet un point fixe.

∗ **23** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante.
Montrer que f admet un unique point fixe.

---

24 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue bijective et strictement croissante.

Montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f\left(a + \dfrac{1}{2}\right) = f(a) + \dfrac{1}{2}$.

∗ **25** Soit $(p,q) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ et f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ avec $f(0) \neq f(1)$.
Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $pf(0) + qf(1) = (p+q)f(x_0)$.

∗ **26** Soit I un intervalle et f et g deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur I et telles que $|f| = |g|$. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

∗ **27** Soient f et g deux fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ continues et telles que $\sup_{[0,1]} f = \sup_{[0,1]} g$.
Montrer que les graphes de f et g se coupent.

---

28 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On suppose que $f(I)$ est fini. Montrer que f est constante.

---

29 Soit $I = [0,+\infty[$ et $f : I \to I$ une fonction continue telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_I$.
(1) Montrer que f est strictement croissante. (2) Montrer que $f = \mathrm{Id}_I$.

∗ **30** Soit f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in [a,b],\ f(x) < g(x)$.
Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in [a,b],\ f(x) + \alpha \leqslant g(x)$.

∗ **31** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique avec $T > 0$.
(1) On suppose que f admet une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.
(2) On suppose que f est continue.
[a] Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.
[b] Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f(\mathbb{R}) = f\left(\left[a, a + \frac{T}{2}\right[\right)$.

∗ **32** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue avec $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

∗ **33** Soient f et g deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et (x_n) une suite de $[0,1]$.
On suppose $\forall x \in [0,1],\ 0 < f(x) < g(x)$. Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \left(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right)^n$.
Montrer que (u_n) converge vers 0.

---

34 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.

---

35 Montrer que $z \mapsto ze^z$ est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

---

36 Soit $f, g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues telles que $f \circ g = g \circ f$.
L'objectif de l'exercice et de montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = g(a)$.
On suppose, par l'absurde, que $\forall x \in [0,1],\ f(x) \neq g(x)$.
(1) Montrer qu'on peut se ramener au cas où, par exemple, il existe $m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) \geqslant g(x) + m.$$
(2) Montrer, alors, par récurrence, que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,1], \quad f^n(x) \geqslant g^n(x) + nm, \qquad \text{où } f^n = f \circ \cdots \circ f.$$
(3) En déduire une contradiction.
(4) Montrer que le résultat est faux si on remplace $[0,1]$ par $\mathbb{R}$.

---

37 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \text{ avec } (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \text{ et } p \wedge q = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

① Soit $a \in \mathbb{Q}$. Montrer que f n'est pas continue en a.

② Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Le but de ce qui reste est de montrer que f est continue en a.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\Gamma = \left\{ (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \;\middle|\; q \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon} \text{ et } \left| a - \dfrac{p}{q} \right| < 1 \right\}$.

On suppose $\Gamma = \varnothing$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - a| < 1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

③ On suppose dans la suite $\Gamma \neq \varnothing$. Montrer que Γ est fini.

④ On considère l'ensemble $F = \left\{ \dfrac{p}{q} \mid (p,q) \in \Gamma \right\}$. Alors F est aussi non vide et fini.

On pose alors $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $\eta = \min\left(1 \,,\, \min_{k=1}^{n} |a_k - a|\right)$. Justifier que $\eta > 0$.

⑤ Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - a| < \eta$. Justifier que $x \notin F$.

⑥ Montrer que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ et conclure.

---

38 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in [0,1]$, la restriction de f à $[0,1] \setminus \{x\}$ admet une limite finie en x. Soit φ la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1], \; \varphi(x) = \lim_{\substack{t \to x \\ t \neq x}} f(t)$. Montrer que φ est continue sur $[0,1]$.